

# Un problema de contrast d'hipòtesis. TFLOP

# TFLOP-Introducció

---

A continuació recordarem breument el sentit dels problemes de contrast d'hipòtesis i veurem com aplicar la teoria en un cas particular relacionat amb la velocitat dels supercomputadors.

---

## Com resoldre un problema de contrast d'hipòtesi

En aquest capítol veurem com plantejar i resoldre un problema de contrast d'hipòtesis a partir d'una única mostra. Com recordareu es tracta de

- A) proposar el valor d'una certa quantitat (aquesta serà la **hipòtesi nul·la**) i cal intentar esbrinar en base a un procediment estadístic
- B) si és raonable mantenir aquest valor o si és més probable que el valor real de la quantitat sigui diferent, inferior o superior al proposat (aquesta serà la **hipòtesi alternativa**).

Recordeu que sempre ens basarem en la teoria de la probabilitat per poder argumentar les nostres conclusions.

## Formalització del problema

El primer que cal fer és analitzar l'enunciat per tal de trobar els elements rellevants que ens permetran plantejar i resoldre eficientment el problema.

Essencialment cal seguir quatre passos:

- A. Ens haurem de fixar en quina quantitat estem estudiant, si correspon a
  - 1) la *mitjana* d'una certa variable numèrica o a

- 
- 2) la *proporció* de vegades que es dóna una certa propietat o a
  - 3) la *variància* d'una variable numèrica o a
  - 4) d'altres quantitats que es puguin analitzar usant contrast d'hipòtesis.

B. Cal que trobem les *dades obtingudes a partir de la mostra*, com per exemple, la seva mida i les mitjanes, proporcions o desviacions típiques calculades amb la mostra.

C. També cal tenir en compte si podem suposar *normalitat* de la variable ja que molts resultats en depenen. Si treballem sobre la mitjana és important saber si coneixem la desviació típica de la població.

D. A continuació cal descobrir quina és la hipòtesi nul·la, és a dir, el valor que assumim per a la quantitat que estem estudiant i que constitueix el punt de partida del problema, i quina és la hipòtesi alternativa, és a dir, l'opció que volem contraposar a la hipòtesi nul·la. Concretament podem plantejar-nos si el veritable valor de la quantitat és *diferent, inferior o superior* a la hipòtesi nul·la proposada. També hem de determinar el **nivell de** significació del nostre contrast.

Quan tinguem fixades la hipòtesi nul·la i l'alternativa, podem plantejar el contrast que ens permetrà, donada una certa probabilitat (o nivell de significació), decidir si és més plausible mantenir el valor inicialment suposat (hipòtesi nul·la) o cal acceptar l'alternativa.

# El problema TFLOP



---

**Analitzarem l'enunciat per arribar al plantejament i resolució del problema.**

# L'enunciat

En aquest cas ens plantejem el següent problema basat en la mesura de la velocitat dels grans supercomputadors:

“A la Wikipèdia (versió anglesa) podem llegir que “En general, la velocitat d'un supercomputador es mesura en "**FLOPS**" (Floating Point Operations Per Second), o bé "**TFLOPS**" ( $10^{12}$  FLOPS, pronunciat “teraflops”), o "**PFLOPS**" ( $10^{12}$  TFLOPS, pronunciat “petaflops”).) Aquesta mesura

es basa en un benchmark particular, que efectua una **descomposició LU** d'una matriu gran.” Suposem que hem efectuat 100 cops la descomposició LU i hem obtingut en l'ordinador A una velocitat mitjana de 2000 TFLOPS amb una desviació estàndard de 50 TFLOPS. Suposant que la velocitat segueix una distribució normal, determineu si podem afirmar que la velocitat mitjana de l'ordinador A és superior a 1992. Considereu un nivell de significació  $\alpha=0,05$ .”

Ens esforçarem ara en resoldre utilitzant eines estadístiques aquest dilema.



Podeu consultar en <http://top500.org/>  
la llista dels ordinadors més potents  
del món.

# L'enunciat, anàlisi

## Qüestions que ens hem de plantejar

Per veure de quin tipus de problema es tracta (i en conseqüència per trobar les fórmules que cal usar i els càlculs que cal fer) ens hem de plantejar i respondre unes qüestions prèvies.

Començarem per fixar-nos en quina és la quantitat que estem investigant. Es tracta d'esbrinar el valor d'una mitjana, d'una

proporció, o bé d'una variància? També hem de descobrir quin valor suposem que té aquesta quantitat (la famosa hipòtesi nul·la).

En l'enunciat podem destacar les següents expressions rellevants per al nostre anàlisi:

“Suposem que hem efectuat 100 cops la descomposició LU i hem obtingut en l'ordinador A una velocitat mitjana de 2000 TFLOPS amb una desviació estàndard de 50 TFLOPS. Suposant que la velocitat segueix una distribució normal,

determineu si podem afirmar que la velocitat mitjana de l'ordinador A és superior a 1992. Considereu un nivell de significació  $\alpha=0,05$ .”

A partir de l'enunciat cal resoldre les següents qüestions:

Anàlisi de l'enunciat

**Pregunta 1 de 6**

Ens plantegem un contrast sobre

- A.** La mitjana
- B.** La proporció
- C.** La variància
- D.** La moda



Comprobar res-  
puesta



---

Finalment podem concloure el següent:

A) És un contrast sobre la mitjana de la velocitat mesurada en un supercomputador.

B) La mida de la mostra és 100, la mitjana de la velocitat en aquesta mostra va ser 2000 i la desviació típica 50.

C) Suposem que la velocitat segueix una distribució normal i no tenim informació sobre la desviació típica poblacional.

D) A continuació cal que ens concentrem en quin valor suposem per a la velocitat i amb quins valors ho contraposem. La frase “**determineu si podem afirmar que**

**la velocitat mitjana de l'ordinador A és superior a 1992**” ens diu que el valor de partida és 1992, (hipòtesi nul·la) i també ens diu que volem investigar si la veritable mitjana és superior a 1992, amb el que la hipòtesi nul·la serà que la mitjana és 1992 i l'alternativa serà que la mitjana sigui més gran que 1992. El nivell de significació és  $\alpha=0,05$ .

# Informació obtinguda

En resum, disposem d'aquesta informació

Què investiguem?	La mitjana de la velocitat d'un supercomputador
Mida de la mostra	100
Mitjana de la velocitat calculada a partir de la mostra	2000 TFLOPS

La velocitat es considera que segueix una distribució normal?	Sí
Hipòtesi (nul·la) sobre el valor real de la mitjana de la velocitat	1992 TFLOPS
Hipòtesi alternativa sobre el valor real de la mitjana de la velocitat	> 1992 TFLOPS
Nivell de significació	0,05

---

Cal observar que hem mesurat una velocitat mitjana de 2000 TFLOPS, la qual cosa ens podria fer pensar que la velocitat és efectivament superior a 1992. Haurem d'esperar a la conclusió del nostre contrast per veure si podem afirmar que és efectivament superior a 1992 amb un nivell de significació de 0,05.

# Formalització del problema i càlculs

A partir de tota la informació recollida procedirem a formalitzar el problema i a cercar la distribució apropiada per resoldre'l. Com que la mida de la mostra és  $n=100$ , la població és normal i no coneixem la desviació típica poblacional, es tractarà d'un contrast de la mitjana amb desviació típica poblacional desconeguda, que es resol amb un test basat en la **distribució t de Student** amb  $n-1=99$  graus de llibertat. Les hipòtesis nul·la i alternativa són, respectivament

A) Hipòtesi nul·la: suposem que la mitjana (llegida "mu" o "mi") és 1992. Escrivim

$$H_0: \mu = \mu_0 = 1992,$$

on  $\mu_0$  és el valor que suposem per a la mitjana.

B) Hipòtesi alternativa: volem esbrinar si la mitjana és superior a 1992. Escrivim

$$H_1: \mu > 1992.$$

## El test t d'una mostra

Com acabem de comentar, cal usar la distribució t de Student amb  $n-1=99$  graus de llibertat. L'estadístic de contrast s'obté a partir de la fórmula de la distribució t de Student, en la que restem el valor de la mitjana mostral ( $\bar{x}$ ) menys el valor suposat en la hipòtesi nul·la ( $\mu_0$ ), tot dividit per l'a-

---

nomenat error estàndard, que és el quocient de la desviació típica mostral ( $s$ ) per l'arrel quadrada de la mida de la mostra ( $n$ ), és a dir

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

### **Càlcul de l'estadístic de contrast**

Ara calcularem el valor de l'estadístic de contrast en el nostre cas particular. Prenem la fórmula de la distribució  $t$  i substituïm la mitjana mostral ( $\bar{x}$ ) pel seu valor, en aquest cas 2000,  $\mu_0$  per 1992, la desviació típica mostral ( $s$ ) per 50 i la mida de la mostra ( $n$ ) per 100 amb el que obtenim un valor de 1,6:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{2000 - 1992}{\frac{50}{\sqrt{100}}} = 1,6.$$

# Conclusions

## Concepte de conclusió

En un contrast d'hipòtesi podem arribar a la conclusió final de dues maneres (tot i que la conclusió ha de coincidir tant si seguim un criteri com l'altre). Els criteris són:

A) El p-valor. Consisteix a calcular la probabilitat, segons la distribució corresponent, d'obtenir un valor més allunyat que l'estadístic de contrast, seguint la direcció de la hipòtesi

alternativa. En el nostre cas, com que la hipòtesi alternativa és de la forma “>” haurem de calcular  $p(t_{99} > 1,6)$ .

B) El valor crític. Consisteix a trobar aquell valor tal que la probabilitat d'obtenir un valor més allunyat (també segons la direcció de la hipòtesi alternativa) coincideix amb el nivell de significació. En el nostre cas és el valor  $t_{0,05;99}$  tal que

$$p(t_{99} > t_{0,05;99}) = 0,05.$$

## Conclusió en base al p-valor

---

En base al p-valor i per respondre la pregunta que ens fèiem inicialment, és a dir, per saber si la velocitat esperada és 1992 TFLOPS o és superior, i com que la hipòtesi alternativa és de la forma

$$\mu > 1992$$

haurem de calcular el p-valor en base a la distribució t de Student de 99 graus de llibertat ( $t_{99}$ ) per a trobar la probabilitat d'obtenir valors superiors a l'estadístic de contrast. Així doncs cal calcular el p-valor com

$$p\text{-valor} = p(t_{99} > 1,6).$$

Usant algun programari adequat podem trobar que

$$p\text{-valor} = p(t_{99} > 1,6) = 0,05639.$$

Com que aquest p-valor és superior al nivell de significació (0,05) haurem de mantenir la hipòtesi nul·la ja que no tenim prou evidència per refusar-la.

Cal destacar que el p-valor és superior a 0,05 per molt poc però tot i així ens veiem forçats a mantenir la hipòtesi nul·la.

Cal destacar que el p-valor és superior a 0,05 per molt poc però tot i així ens veiem forçats a mantenir la hipòtesi nul·la, amb aquest nivell de significació.

## Sobre el p-valor

### Pregunta 1 de 4

El p-valor és

- A. La probabilitat d'obtenir la hipòtesi nul·la
- B. La probabilitat d'obtenir valors més allunyats del que suposa la hipòtesi nul·la
- C. La probabilitat d'obtenir la hipòtesi alternativa
- D. La probabilitat d'obtenir el valor crític

Comprobar res-  
puesta

## Conclusió en base al valor crític

Alternativament podríem usar el **valor crític** per respondre la nostra pregunta. Com que la hipòtesi alternativa és de la forma

$$\mu > 1992$$

el valor crític és aquell valor  $t_{0,05;99}$  tal que  $p(t_{99} > t_{0,05;99}) = 0,05$ .

Amb ajuda de les taules o d'algun programa d'ordinador obtenim que  $t_{0,05;99} = 1,660$ . Cal recordar que en aquest cas refusarem la hipòtesi nul·la si el valor de l'estadístic de contrast és suficientment gran -més gran que el valor crític-.

Com que en aquest cas l'estadístic de contrast no és superior al valor crític ja que

$$t = 1,6 < 1,660 = t_{0,05;99}$$

haurem de mantenir la hipòtesi nul·la perquè no tenim prou evidència per refusar-la.

1992, tot i que que s'hagi mesurat una velocitat mitjana de 2000 TFLOPS en les 100 repeticions efectuades.

### Conclusió

#### Pregunta 1 de 3

Com que el p-valor és superior a 0,05

- A.** Acepto la hipòtesi nul·la
- B.** Acepto la hipòtesi alternativa



Comprobar res-  
puesta



# Conclusió final

En general dir que la “Acceptem la hipòtesi nul·la” o “refusem la hipòtesi nul·la” no aporta suficient informació i cal que contextualitzem la conclusió d’acord a la situació que ens estem plantejant. En el nostre cas, cal mantenir la hipòtesi nul·la i això vol dir que cal acceptar que la velocitat mitjana del nostre superordinador és 1992 TFLOPS, ja que no podem assegurar que sigui superior a 1992, tot i que que s’hagi mesurat una

velocitat mitjana de 2000 TFLOPS en les 100 repeticions efectuades.

# Descomposició LU

Mètode pel qual es descompon una matriu quadrada en el producte d'una matriu triangular inferior per una de triangular superior. Més informació a

<http://ca.wikipedia.org/wiki/Factorització>

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 2 - Sin título

# Distribució t de Student

Distribució de probabilitat que sorgeix del problema d'estimar la mitjana d'una població normalment distribuïda quan la mida de la mostra és petita.

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 2 - Formalització del problema i càlculs

# Estadístic de contrast

Valor que es calcula a partir de les dades de la mostra i que segueix una distribució coneguda a partir de la que podem decidir el contrast.

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

# FLOPS

Floating point Operations Per Second: és una unitat de mesura del rendiment d'un ordinador.

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 2 - Sin título

# Hipòtesi alternativa

És una hipòtesi sobre el valor d'un cert paràmetre que volem contrastar oposant-lo amb hipòtesi nul·la.

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 1 - TFLOP

# Hipòtesi nul·la

És el valor que suposem que té un cert paràmetre. En plantejem si cal mantenir aquest valor o bé convé refusar-lo i acceptar la hipòtesi alternativa.

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 1 - TFLOP

# Nivell de significació

Valor

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 1 - TFLOP

# P-valor

És la probabilitat...

---

## Términos del glosario relacionados

Arrastrar términos relacionados aquí

---

**Índice**

Buscar término

# TFLOPS

TeraFLOPS:  $10^{12}$  FLOPS

---

## Términos del glosario relacionados

FLOPS

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 2 - Sin título

# Valor crític

Valor a partir del qual refusem la hipòtesi nul·la i acceptem l'alternativa.

---

## Términos del glosario relacionados

Hipòtesi alternativa, Hipòtesi nul·la

---

**Índice**

Buscar término

Capítulo 2 - Conclusions