Càlculs amb la distribució Normal

Àngel Gil, UOC

Introducció

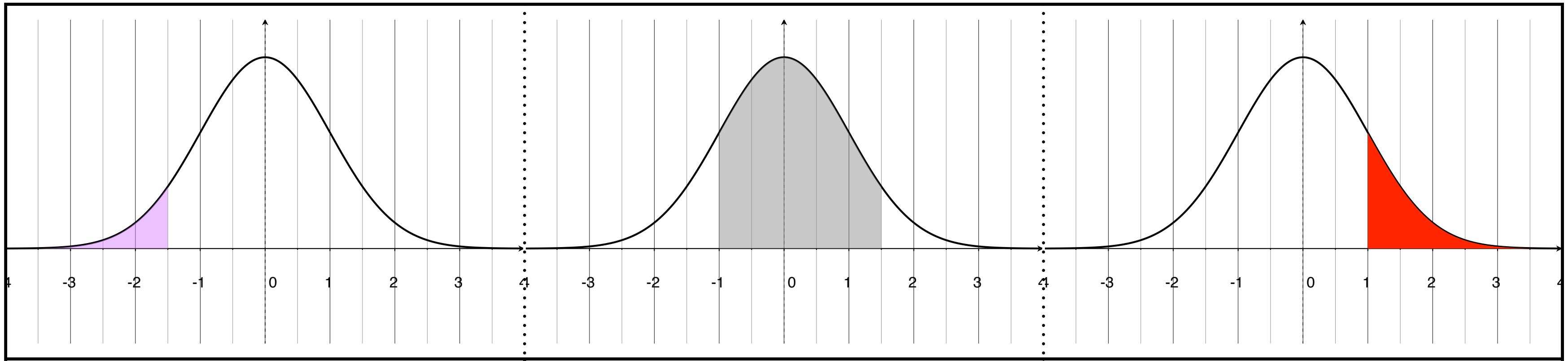
En aquest document treballarem les propietats de la distribució normal i donarem pautes de com, amb l'ajuda de la gràfica de la seva funció de densitat de probabilitat, calcular diferents probabilitats.
No hem d'aprendre tots els casos de memòria, sinó que cal aprendre com calcular cada cas, a partir de la corresponent situació gràfica i les propietats de la distribució normal.
A més veurem, suposant que X segueix una distribució normal,

1.-Com usar les taules de la normal per a calcular probabilitats tant

- -Directes: donat **a**, quant val p(X≥**a**)? quant val p(X≤**a**)?
- -D'un interval: donats **a** i **b**, quant val p(**a**≤X≤**b**)?
- -Inverses: donada K, quin valor **z*** fa que p(X≥**z***)=K?

2.-Com usar Minitab per a calcular les mateixes probabilitats i valors.

Probabilitat i àrea



1) $p(X \leq -1{,}5)$	2) $p(-1 \leq X \leq 1{,}5)$	3) $p(X \geq 1)$

Recordem que la probabilitat que la variable aleatòria X es trobi dins d'un cert interval correspon a l'àrea tancada entre la corba de la seva funció de densitat, l'eix d'abscisses i l'interval, tant si l'interval és finit o infinit. Així

l'àrea ombrejada de 1) correspon a $p(X \leq -1{,}5)$

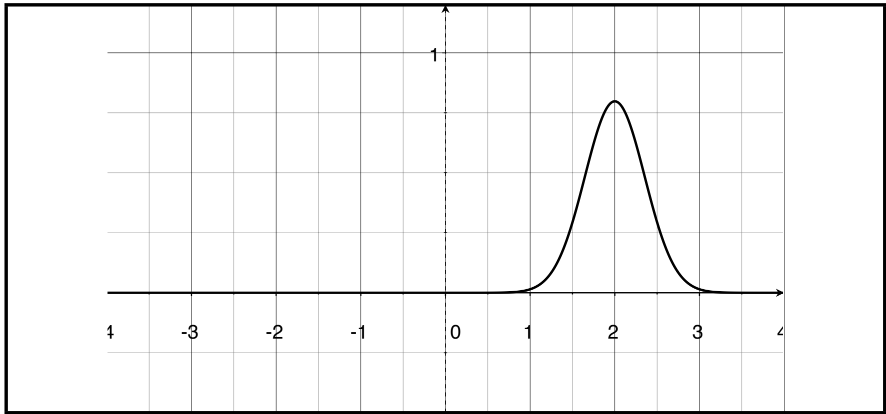
l'àrea ombrejada de 2) correspon a $p(-1 \leq X \leq 1{,}5)$

l'àrea ombrejada de 3) correspon a $p(1 \leq X) = p(X \geq 1)$.

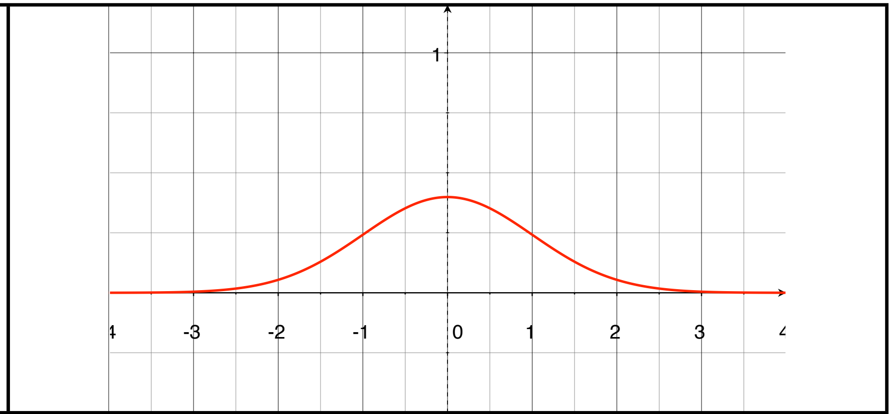
Recordeu finalment que en ser una distribució contínua sempre es dóna que

$p(X=\mathbf{a}) = 0$ i per tant $p(X>\mathbf{a}) = p(X\geq\mathbf{a})$ i $p(X<\mathbf{a}) = p(X\leq\mathbf{a})$.

N(μ,σ²) i N(0,1): estandardització



Normal amb mitjana μ=2 i desviació σ=0,5



Normal estàndard

Recordem que si una variable aleatòria X segueix una llei normal de mitjana μ i desviació estàndard σ (escrit $X \sim N(\mu,\sigma^2)$) aleshores la variable $Z=(X-\mu)/\sigma$ segueix una distribució normal de mitjana 0 i desviació estàndard 1, anomenada "normal estàndard". Escriurem $Z \sim N(0,1)$ i direm que hem estandarditzat X.

Les gràfiques d'aquest document mostren la normal estàndard amb eixos a diferent escala per facilitar l'explicació.

Algunes propietats

- Com que l'àrea sota la corba és 1 tenim que p(-∞≤ Z ≤∞) = 1.

- Per a tots els valors **a≤0** i per la simetria de la corba,

  p(Z ≤ **a**) = p(Z ≥ **-a**).

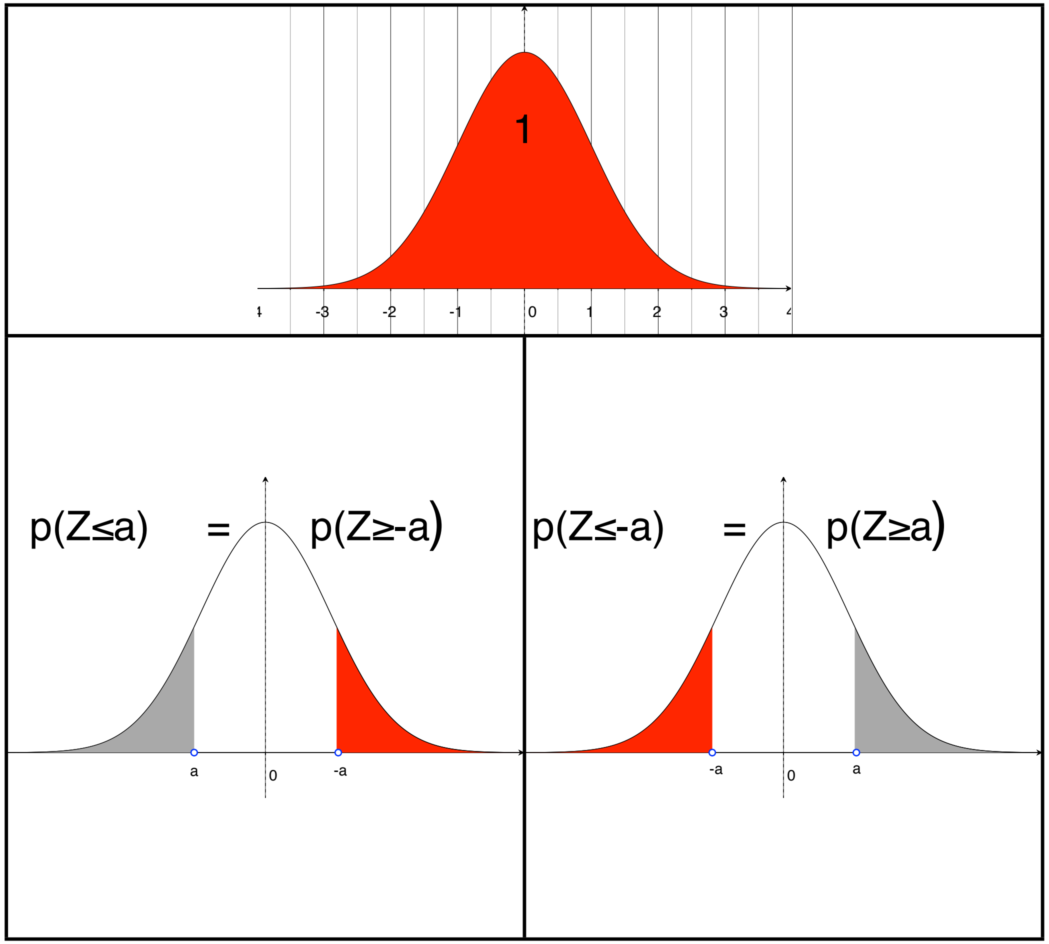
Per exemple, p(Z ≤ -1)=p(Z ≥ 1).

- Per a tots els valors **a≥0** i per la simetria de la corba,

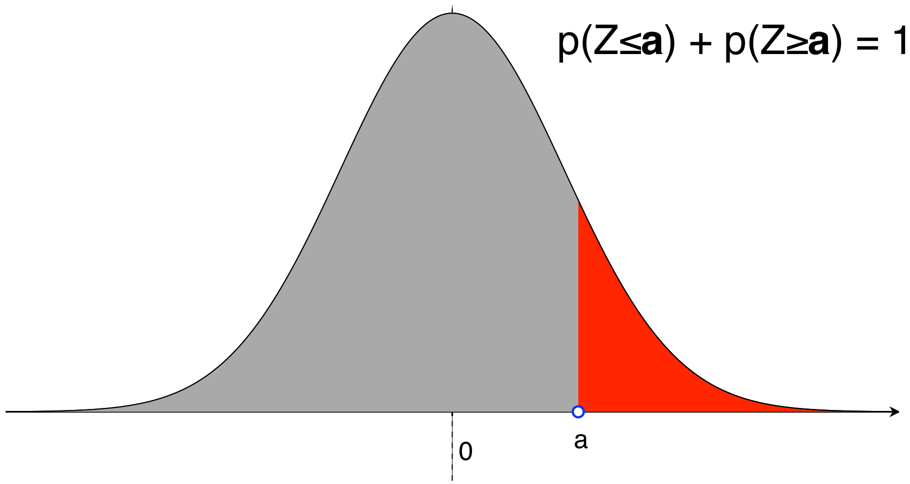
  p(Z ≥ **a**) = p(Z ≤ **-a**).

Per exemple, p(Z ≥ 1)=p(Z ≤ -1).

- Aquestes propietats són certes en qualsevol distribució normal que tingui mitjana (esperança) 0.



Àrea total



Com que l'àrea total és 1, sempre tenim que

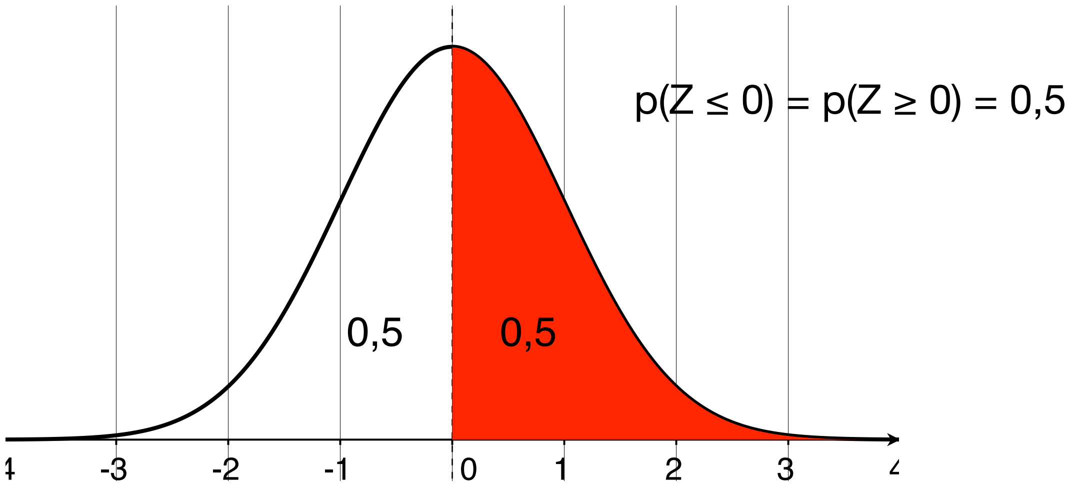
$$p(Z \le \mathbf{a}) + p(Z \ge \mathbf{a}) = 1 \text{ i, aïllant}$$

$$p(Z \ge \mathbf{a}) = 1 - p(Z \le \mathbf{a}) \quad \text{i} \quad p(Z \le \mathbf{a}) = 1 - p(Z \ge \mathbf{a}).$$

Així, per exemple,

$$p(Z \le 1) = 1 - p(Z \ge 1) \quad \text{i} \quad p(Z \ge 1) = 1 - p(Z \le 1).$$

Àrea, simetria i 0



Per la simetria i la propietat anterior

$$p(Z \leq 0) + p(Z \geq 0) = 1$$

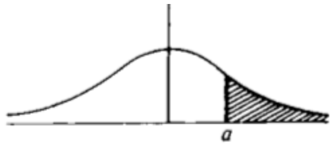
però com que

$$p(Z \leq 0) = p(Z \geq 0)$$

tenim que

$$p(Z \leq 0) = p(Z \geq 0) = 0{,}5.$$

Ús de les taules



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611	0,2579	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451

Disposem de taules amb els valors de

p(Z≥**a**) amb **a**≥0.

Per tant haurem de reduir tots els càlculs a expressions d'aquesta forma.
Observem que per exemple

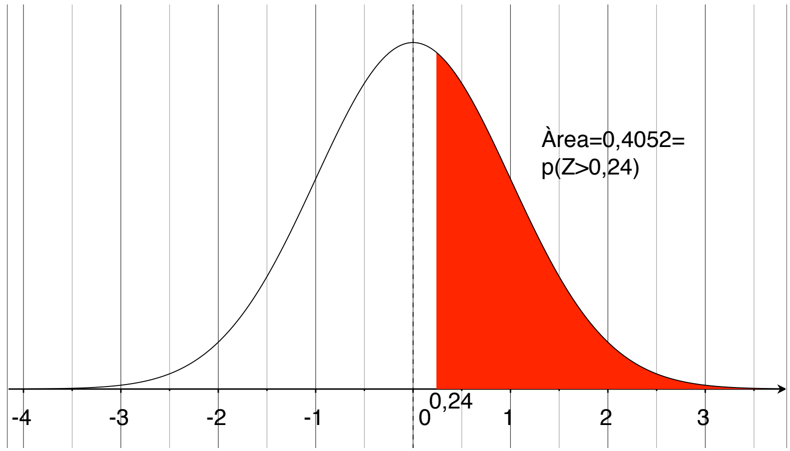
p(Z≥0,27) = 0,3936, p(Z≥0,33) = 0,3707 i p(Z≥0,69) = 0,2451.

Per a calcular p(Z≥0,405) farem la mitjana dels valors corresponents a 0,40 i 0,41:

p(Z≥0,405)=(0,3346+0,3409)/2=0,34275.

Càlcul de p(Z≥a) amb a≥0

Per a calcular la probabilitat que Z sigui superior a 0,24 cal dibuixar la situació i mirar directament a la taula la fila 0,2 i columna 0,04



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

amb el que obtenim

p(Z ≥ 0,24) = 0,4052

Càlcul de p(Z≥a) amb a≤0

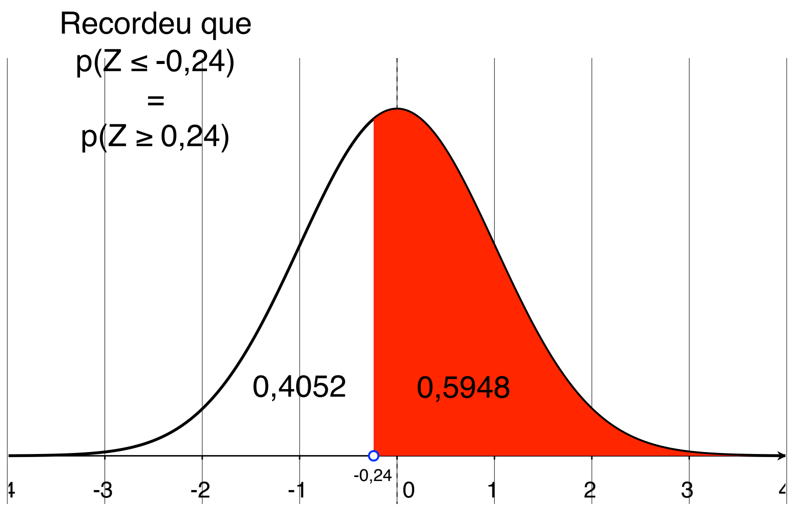
Per a calcular la probabilitat que Z sigui superior a -0,24 cal dibuixar la situació i observar que
$p(Z \geq -0{,}24) + p(Z \leq -0{,}24) = 1$.

Així doncs

$$p(Z \geq -0{,}24) = 1 - p(Z \leq -0{,}24) = 1 - p(Z \geq 0{,}24)$$

amb el que obtenim

$$\mathbf{p(Z \geq -0{,}24) =}$$
$$\mathbf{= 1 - 0{,}4052 = 0{,}5948}$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

<u>Càlcul de $p(Z \leq a)$ amb $a \geq 0$</u>

Per a calcular la probabilitat que Z sigui inferior a 0,24 cal dibuixar la situació i observar que

$p(Z \leq 0{,}24) + p(Z \geq 0{,}24) = 1$

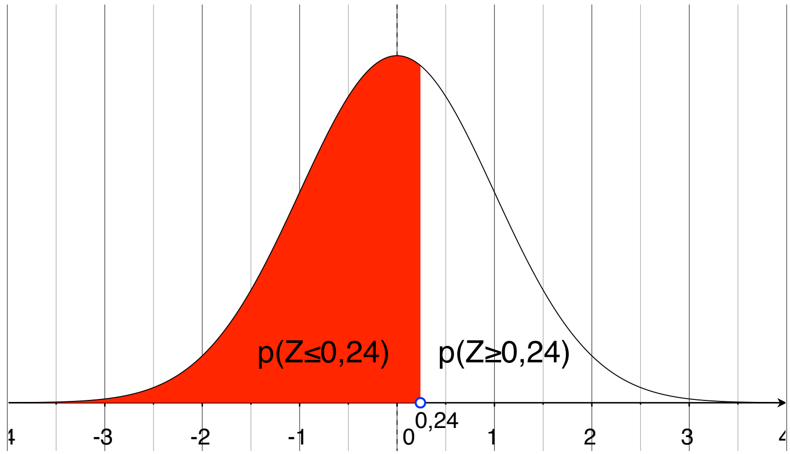
i per tant

$p(Z \leq 0{,}24) = 1 - p(Z \geq 0{,}24)$

amb el que obtenim

$p(Z \leq 0{,}24) = 1 - 0{,}4052 = 0{,}5948$.

Observem en vermell l'àrea corresponent a $p(Z \leq 0{,}24)$.



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	[illegible]
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	[illegible]
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Càlcul de p(Z≤a) amb a≤0

Per a calcular la probabilitat que Z sigui inferior a -0,24 cal dibuixar la situació i observar que

p(Z ≤ -0,24)=

=p(Z ≥ 0,24)

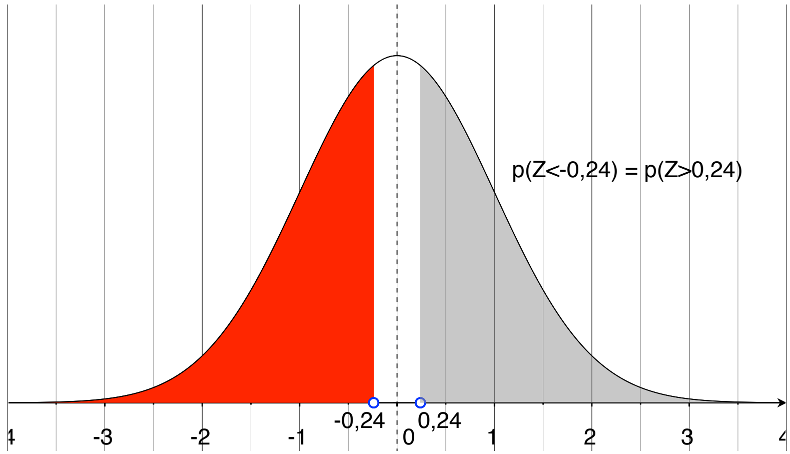
(Observeu la gràfica: l'àrea de color gris és igual a la de color vermell)

amb el que obtenim

p(Z ≤ -0,24)=

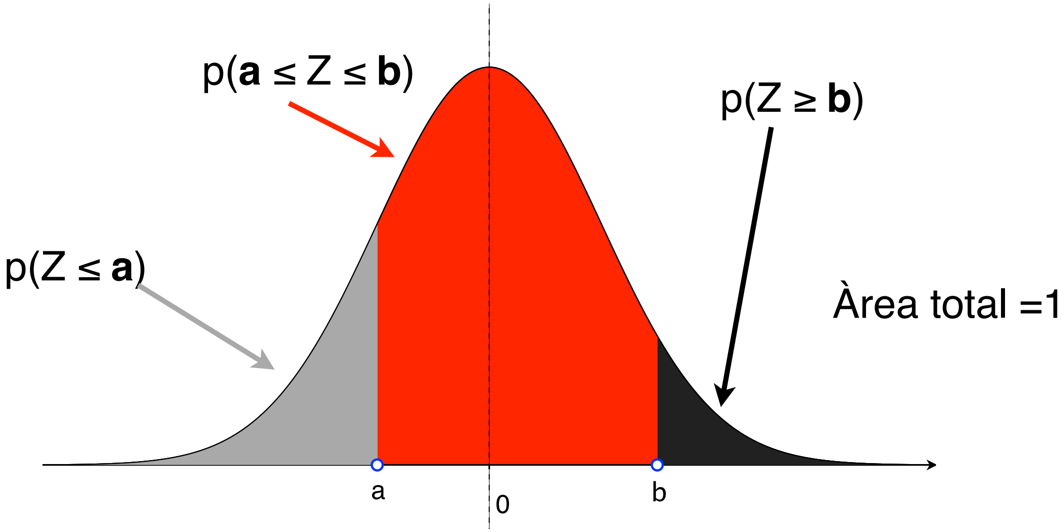
p(Z ≥ 0,24)=

=0,4052



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

Probabilitat d'un interval (1)



Per a calcular la probabilitat que Z estigui **entre a i b** podem dibuixar la situació i observar que

p(Z≤ **a**) + p(**a**≤ Z ≤**b**) + p(Z ≥**b**) = 1

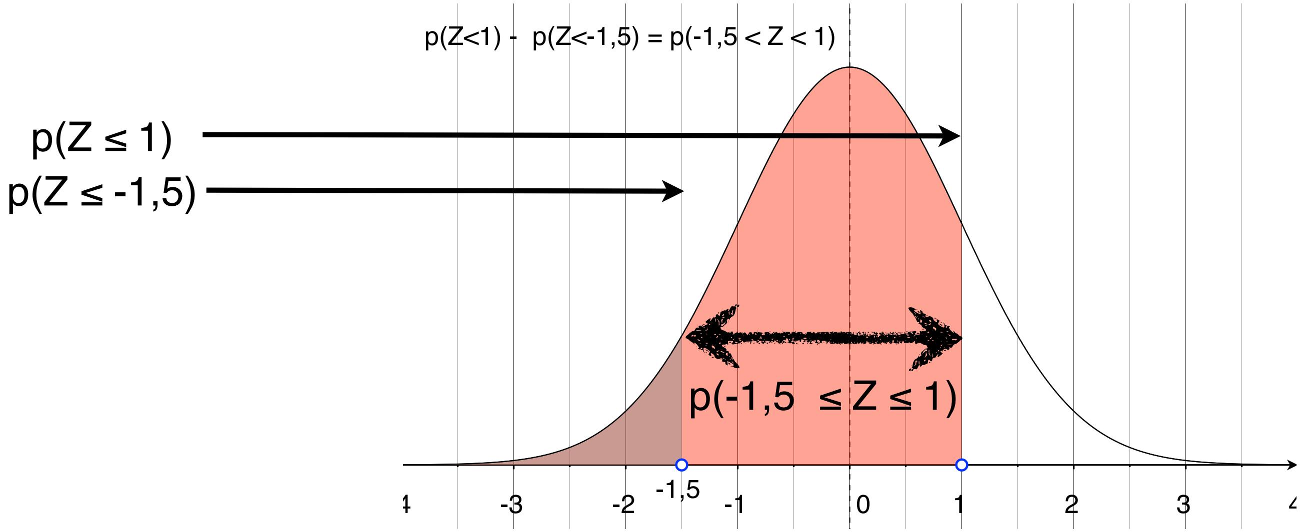
amb el que aïllant la probabilitat de l'interval obtenim

p(**a**≤ Z ≤**b**) = 1 - p(Z ≤**a**) - P(Z ≥**b**).

Per exemple, si **a**=-1,5 i **b**=1

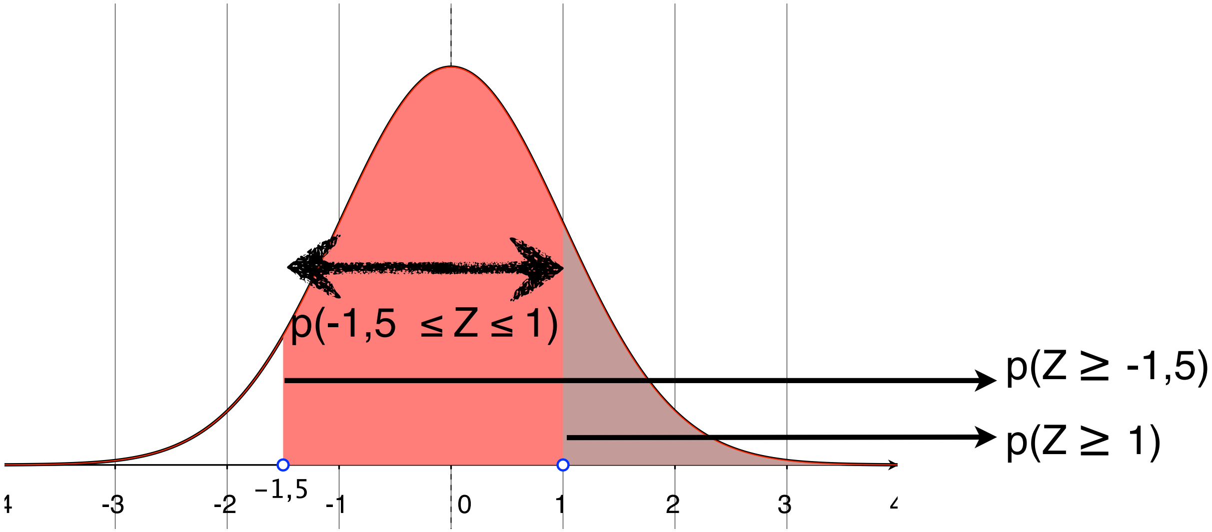
p(-1,5≤ Z ≤1) = 1 - p(Z ≤-1,5) - p(Z ≥1).

Probabilitat d'un interval (2)



Per a calcular la probabilitat que Z estigui **entre a** i **b**
també podem fixar-nos en què
p(**a**≤ Z ≤**b**) = p(Z ≤**b**) - p(Z ≤**a**).
En la gràfica es veu com
p(-1,5≤ Z ≤1) = p(Z ≤1) - p(Z ≤-1,5).

Probabilitat d'un interval (3)



Per a calcular la probabilitat que Z estigui **entre a** i **b**
també podem fixar-nos en què
p(**a** ≤ Z ≤ **b**) = p(Z ≥ **a**) - p(Z ≥ **b**).
En la gràfica es veu com
p(-1,5 ≤ Z ≤ 1) = p(Z ≥ -1,5) - p(Z ≥ 1).
Usarem qualsevol d'aquests tres mètodes per calcular la probabilitat d'un interval.

<u>Càlcul de p(a ≤ Z ≤ b) amb 0≤a≤b</u>

Per a calcular la probabilitat que Z estigui entre 0,1 i 0,42 cal dibuixar la situació i observar que

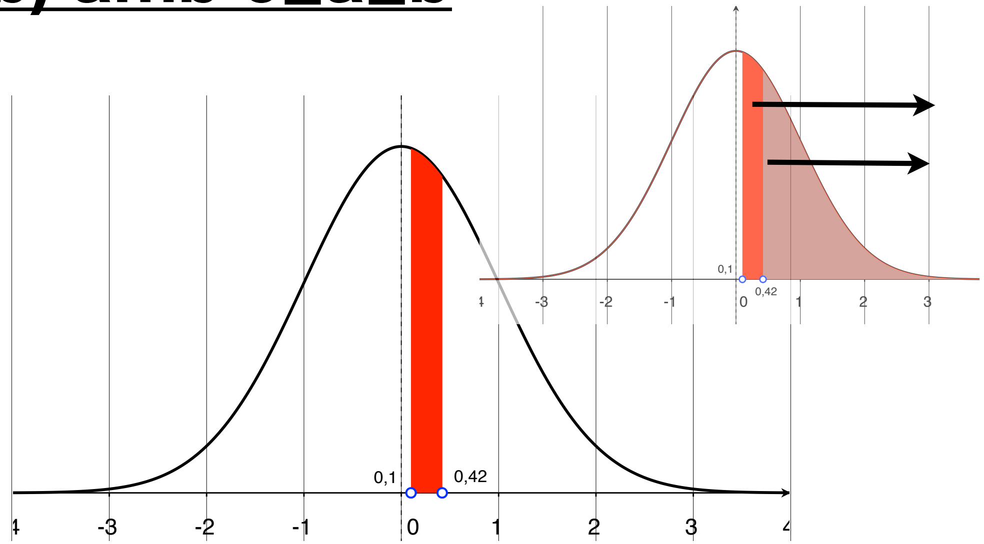
$p(0{,}1 \leq Z \leq 0{,}42)=$

$=p(Z \leq 0{,}42) - p(Z \leq 0{,}1)$

o bé que

$p(0{,}1 \leq Z \leq 0{,}42)=$

$= p(Z \geq 0{,}1) - p(Z \geq 0{,}42)$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

I per tant, usant aquesta última igualtat,

$p(0{,}1 \leq Z \leq 0{,}42)=$

$= 0{,}4602-0{,}3372=\mathbf{0{,}123}$

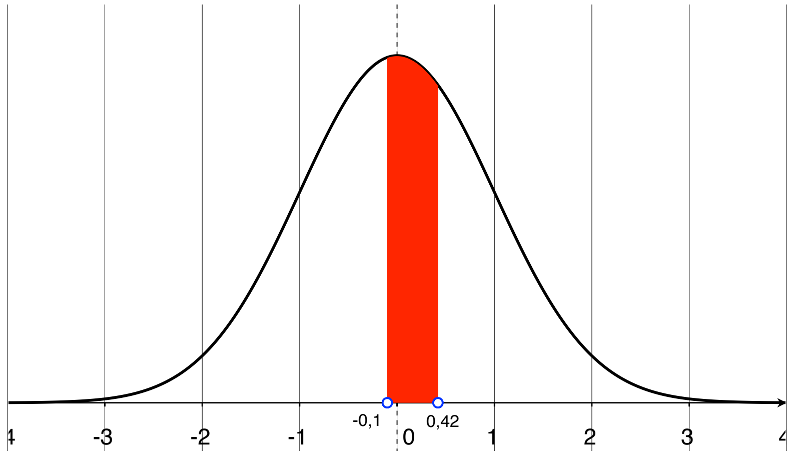
<u>Càlcul de p(a ≤ Z ≤ b) amb a≤0≤b</u>

Per a calcular la probabilitat que Z estigui entre -0,1 i 0,42 cal dibuixar la situació i observar que

$p(-0{,}1 \leq Z \leq 0{,}42) =$

$= p(Z \leq 0{,}42) - p(Z \leq -0{,}1) =$

$= (1 - p(Z \geq 0{,}42)) - p(Z \geq 0{,}1) =$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

$= (1 - 0{,}3372) - 0{,}4602 =$

$= \mathbf{0{,}2026}$

<u>Càlcul de $p(a \leq Z \leq b)$ amb $a \leq b \leq 0$</u>

Per a calcular la probabilitat que Z estigui entre -0,42 i -0,1 cal dibuixar la situació i observar que

$p(-0{,}42 \leq Z \leq -0{,}1)=$

$=p(Z \leq -0{,}1) - p(Z \leq -0{,}42)=$

$=p(Z \geq 0{,}1) - p(Z \geq 0{,}42)$.

Observeu a la gràfica com

$p(-0{,}42 \leq Z \leq -0{,}1) = p(0{,}1 \leq Z \leq 0{,}42)$.

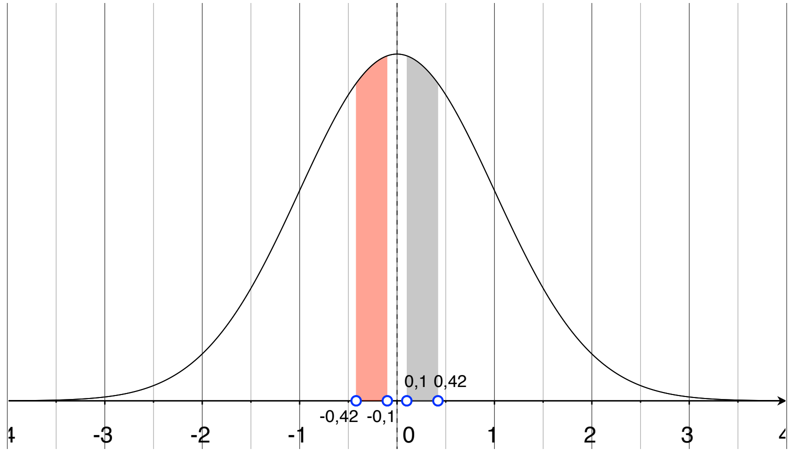
És a dir

$p(-0{,}42 \leq Z \leq -0{,}1)=$

$=p(Z \geq 0{,}1) - p(Z \geq 0{,}42)=$

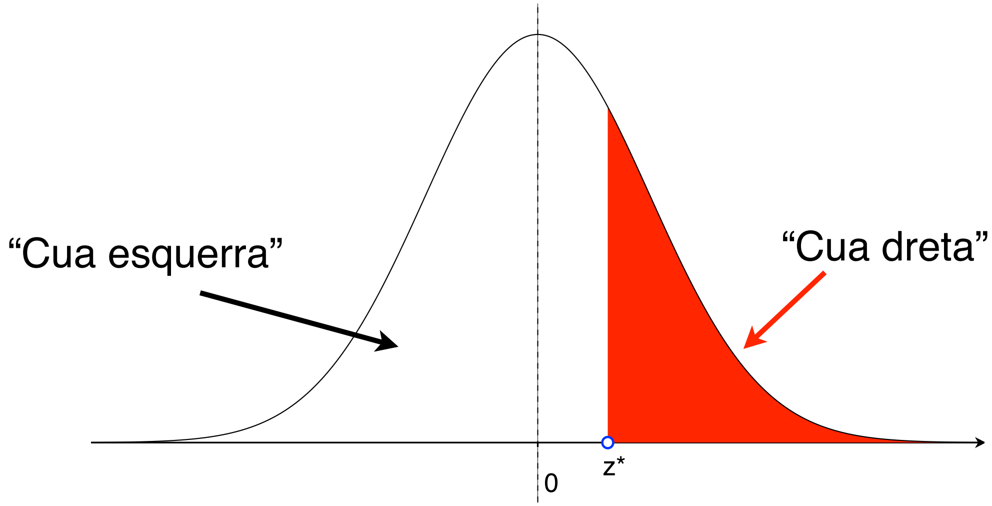
$=0{,}4602 - 0{,}3372=$

$=$**0,123**



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

Probabilitats inverses



Ara ens preguntarem quin valor **z*** deixa a l'esquerra (o a la dreta) una probabilitat donada.

És a dir, donada K ens preguntem quins valors **z*** tenen

$p(Z \leq \mathbf{z^*}) = K$ ("cua esquerra") o

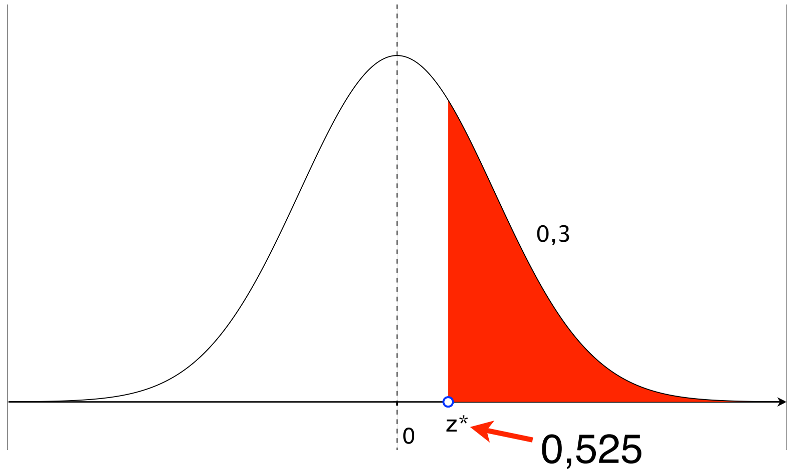
$p(Z \geq \mathbf{z^*}) = K$ ("cua dreta").

Com que K correspon a una probabilitat serà un nombre entre 0 i 1, mentre que **z*** pot ser qualsevol valor.

Si K=0,5 aleshores **z***=0, ja que $p(Z \leq \mathbf{0}) = p(Z \geq \mathbf{0}) = 0{,}5$.

Càlcul del valor z* tal que p(Z ≥ z*)=K amb 0≤K≤0,5

Per a calcular un valor **z*** que deixi a la seva dreta una probabilitat de, per exemple 0,3 cal dibuixar la situació i observar que si p(Z≥ **z***)=0,3 aleshores **z*** serà positiu. A continuació buscarem **dins** la taula el valor 0,3.



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

Obtenim que P(Z≥0,52)=0,3015 i P(Z≥0,53)=0,2981. En casos com aquest farem la mitjana entre els valors de **z*** trobats i considerarem que

z*=(0,52+0,53)/2**=0,525**

Càlcul del valor z* tal que p(Z ≤ z*)=K amb 0≤K≤0,5

Per a calcular un valor **z*** que deixi a la seva esquerra una probabilitat 0,3 cal dibuixar la situació i observar que si

$p(Z \leq \mathbf{z^*}) = 0{,}3$

aleshores **z*** serà negatiu i

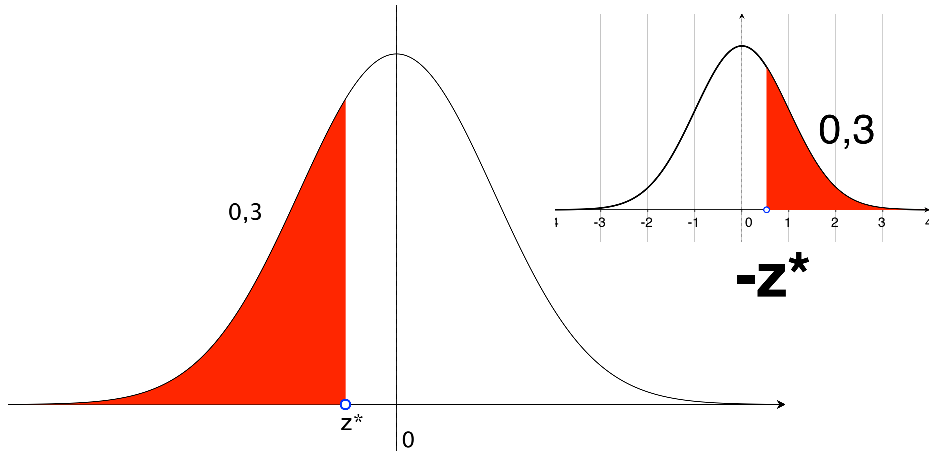
$p(Z \geq -\mathbf{z^*}) = 0{,}3.$

A continuació buscarem dins la taula el valor 0,3 (o el més proper) amb el que

$p(Z \geq 0{,}525) = 0{,}3$

i per tant

$-\mathbf{z^*}=0{,}525$ i $\mathbf{z^*=-0{,}525}$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

<u>Càlcul del valor z* tal que p(Z ≥ z*)=K amb 0,5≤K≤1</u>

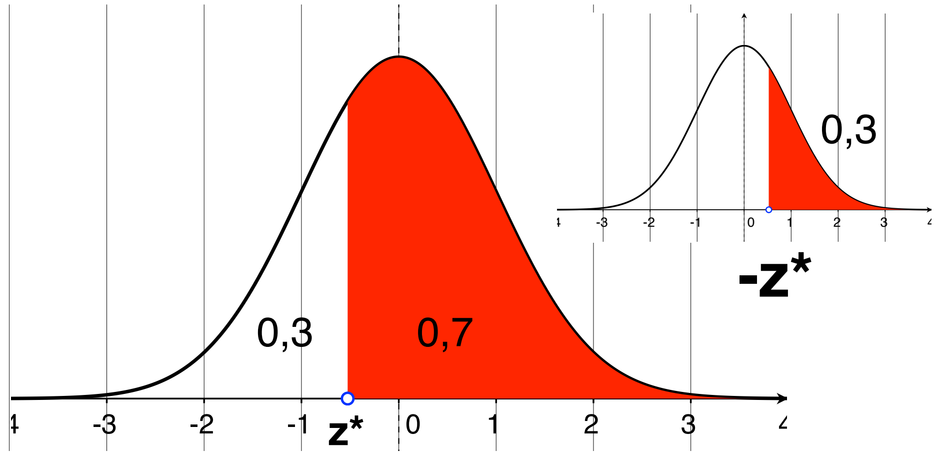
Per a calcular un valor **z*** que deixi a la seva dreta una probabilitat (àrea) de 0,7 cal dibuixar la situació i observar que si

$p(Z \geq \mathbf{z^*})=0,7$

aleshores **z*** serà negatiu. Per tant tenim que

$p(Z \geq \mathbf{z^*})=0,7$ i $p(Z \leq \mathbf{z^*})=0,3$ i aleshores $p(Z \geq -\mathbf{z^*})=0,3$ amb el que

$-\mathbf{z^*}=0,525$ i $\mathbf{z^*=-0,525}$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

Càlcul del valor z* tal que p(Z ≤ z*)=K amb 0,5≤K≤1

Per a calcular un valor **z*** que deixi a la seva esquerra una probabilitat 0,55 cal dibuixar la situació i observar que si

p(Z ≤ **z***)=0,55

aleshores **z*** serà positiu i

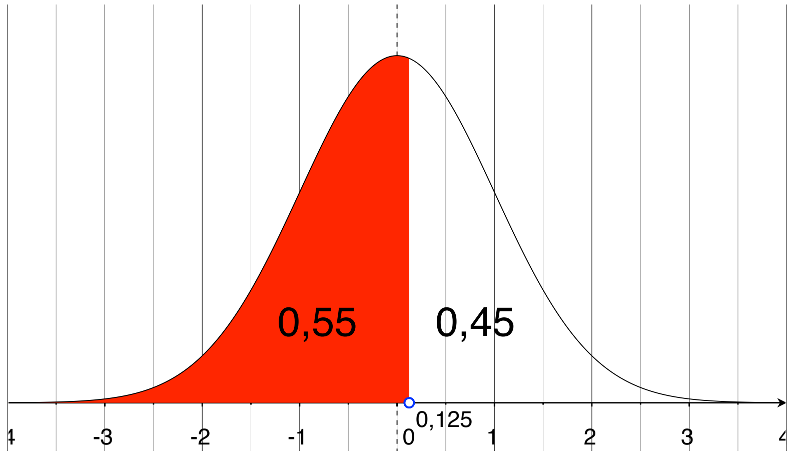
p(Z ≥ **z***)=1-p(Z ≤ **z***) =1-0,55=0,45.

A continuació buscarem **dins** la taula el valor 0,45 (o el més proper) amb el que

p(Z ≥ 0,125)=0,45

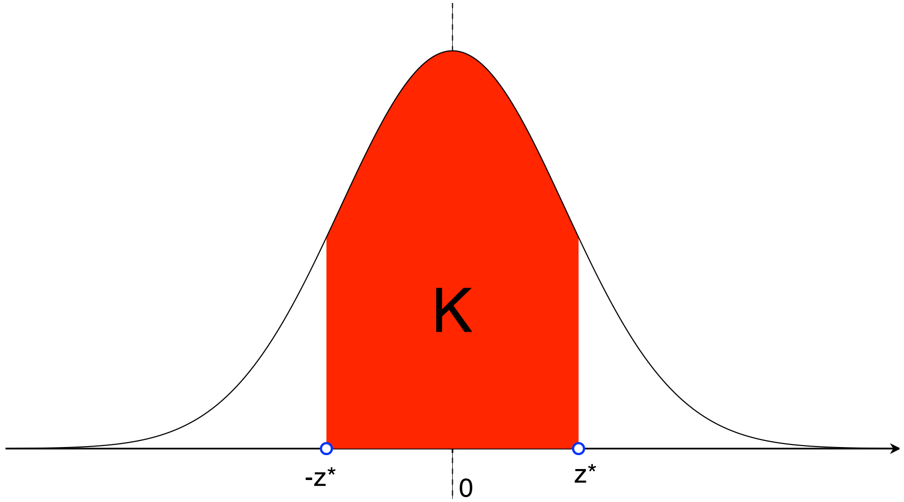
i per tant

z*=0,125.



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005

<u>Probabilitats inverses d'intervals centrats</u>

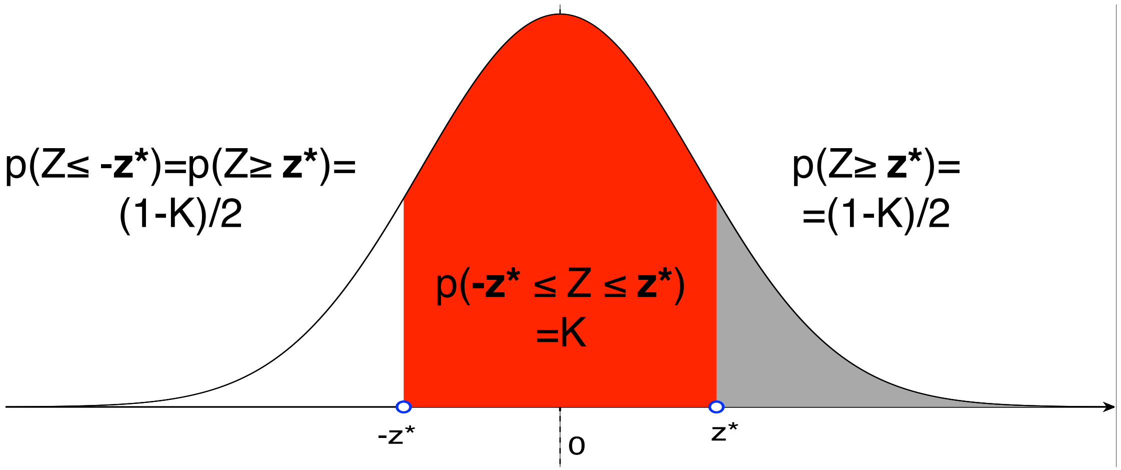


Ara ens preguntarem quin valor **z*** determina entre **-z*** i **z*** un interval amb una probabilitat donada K.

És a dir, donada K ens preguntem quin valor de **z*** satisfà que

p(-**z*** ≤ Z ≤ **z***)=K.

Càlcul de z^* tal que $p(-z^* \leq Z \leq z^*)=K$, $0 \leq K \leq 1$



Per a calcular el valor de $\mathbf{z^*}$ que fa que $p(-\mathbf{z^*} \leq Z \leq \mathbf{z^*}) = K$ cal dibuixar la situació i observar que en aquest cas,

$p(-\mathbf{z^*} \leq Z \leq \mathbf{z^*}) = 1 - p(Z \leq -\mathbf{z^*}) - p(Z \geq \mathbf{z^*}) = 1 - p(Z \geq \mathbf{z^*}) - p(Z \geq \mathbf{z^*}) = 1 - 2p(Z \geq \mathbf{z^*}) = K.$

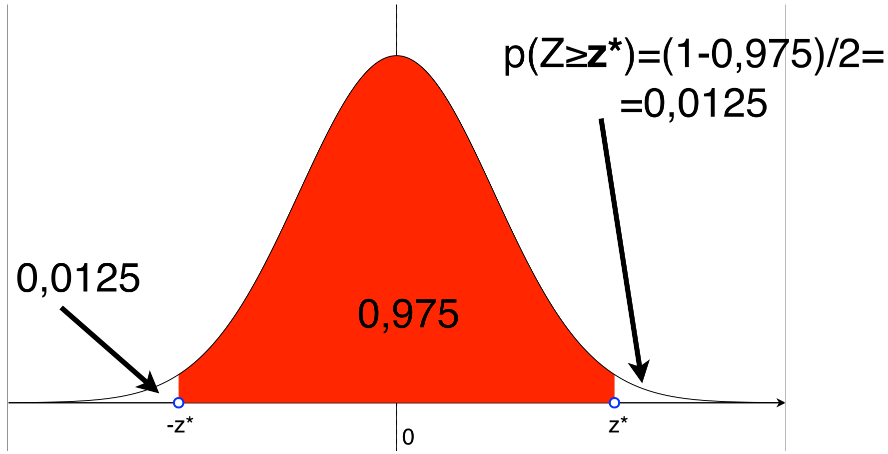
Aïllant veiem que en la regió de color gris ("cua dreta")

$\mathbf{p(Z \geq z^*)=(1-K)/2}$

Aquesta relació ens permetrà trobar el valor de $\mathbf{z^*}$.

<u>Càlcul de z* tal que p(-z* ≤ Z ≤ z*)=0,975</u>

Per a calcular el valor de **z*** que fa que p(-**z*** ≤ Z ≤ **z***) = 0,975 cal dibuixar la situació i observar que en aquest cas, p(Z ≥ **z***) = (1-0,975)/2 = 0,0125.



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096

i per tant

z* = 2,24

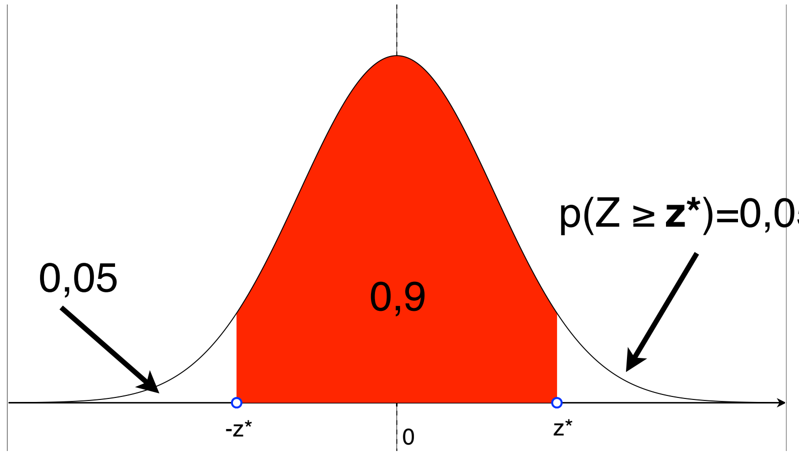
Càlcul de z* tal que p(-z* ≤ Z ≤ z*)=0,9

Per a calcular el valor de **z*** que fa que p(-**z*** ≤ Z ≤ **z***)=0,9 cal dibuixar la situació i observar que en aquest cas, p(Z≥ **z***)=(1-0,9)/2=0,05

i per tant

z* =1,645

(com que 0,05 està justament entre 1,64 i 1,65 prendrem la mitjana d'aquests dos valors, és a dir 1,645).



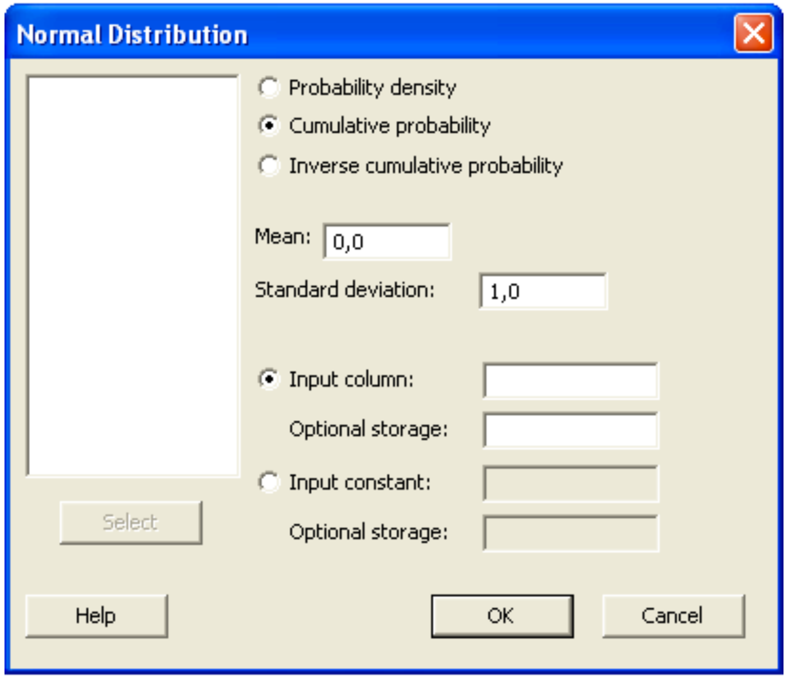
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4841	0,4801
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4091	0,4052	0,4013
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2644	0,2611	0,2579
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
1,0	0,1587	0,1563	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1094	0,1075	0,1057
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Càlculs amb normals no estàndard

- Recordeu que cal estandarditzar (restar la mitjana i després dividir per la desviació estàndard) abans de fer els càlculs.
- Per exemple, si X segueix una distribució normal de mitjana 3 i desviació estàndard 2, aleshores
  - $p(X \leq 4) = p((X-3)/2 \leq (4-3)/2) = P(Z \leq 0{,}5) = 1-0{,}3085 = 0{,}6915$
  - $p(X \geq 2)= p((X-3)/2 \geq (2-3)/2) = P(Z \geq -0{,}5) = 1 - p(Z \leq -0{,}5) =$
    $= 1 - p(Z \geq 0{,}5) = 1- 0{,}3085 = 0{,}6915.$
  - $p(1 \leq X \leq 5) = p((1-3)/2 \leq (X-3)/2 \leq (5-3)/2) = p(-1 \leq Z \leq 1) = 1- p(Z \geq 1) - p(Z \leq -1)$
    $= 1- p(Z \geq 1) - p(Z \geq 1) = 1-2\, p(Z \geq 1) = 1-2*0{,}1587 =0{,}6826.$
  - Si volem trobar un valor **x*** tal que $p(X \geq \mathbf{x^*})=0{,}05$ haurem de buscar un valor tal que $p((X-3)/2 \geq (\mathbf{x^*}-3)/2)= p(Z \geq (\mathbf{x^*}-3)/2)=0{,}05$ amb el que $(\mathbf{x^*}-3)/2= 1{,}645$ i per tant $\mathbf{x^*}= 1{,}645*2+3 = 6{,}29$.

La distribució Normal en Minitab

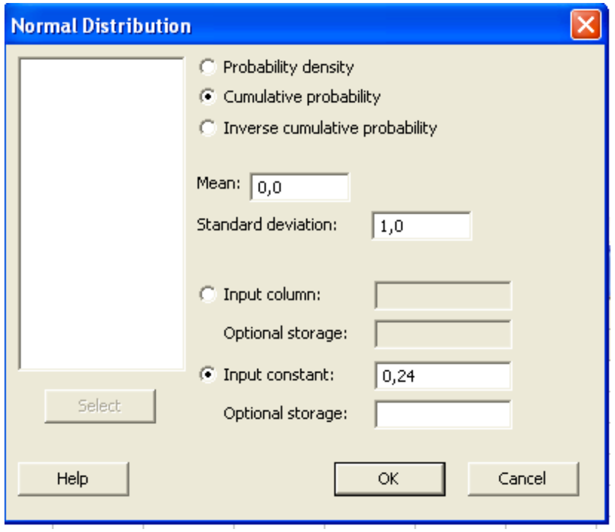
Accedirem al menú
Calc-Probability Distributions->Normal
en el que apareix un quadre de diàleg on cal introduir la mitjana (*Mean*) i la desviació estàndard (*Standard deviation*).
L'opció *Cumulative probability* permet calcular probabilitats de la forma
$p(X \leq \mathbf{a})$
on **a** és el valor que introduïm a *Input constant.*
Per a calcular $p(X \geq \mathbf{a})$ calcularem amb Minitab $p(X \leq \mathbf{a})$ i després manualment farem $1-p(X \leq \mathbf{a})$.



Probabilitats amb Minitab

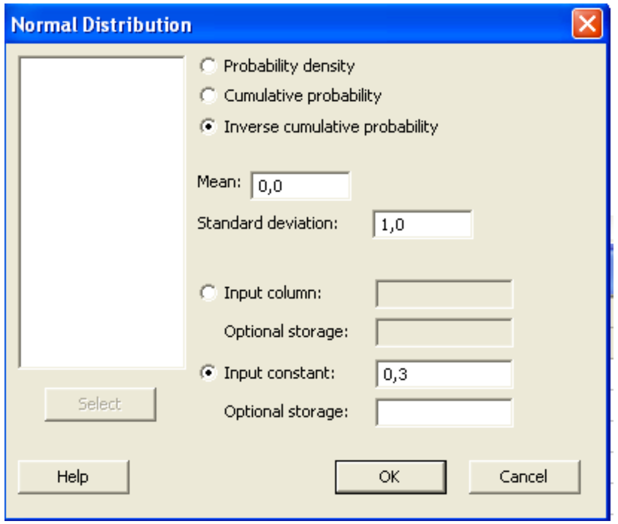
Així, per a p(X≤0,24), obtenim:

```
Cumulative Distribution Function
Normal with mean = 0 and standard deviation = 1
   x  P( X <= x )
0,24     0,594835
```



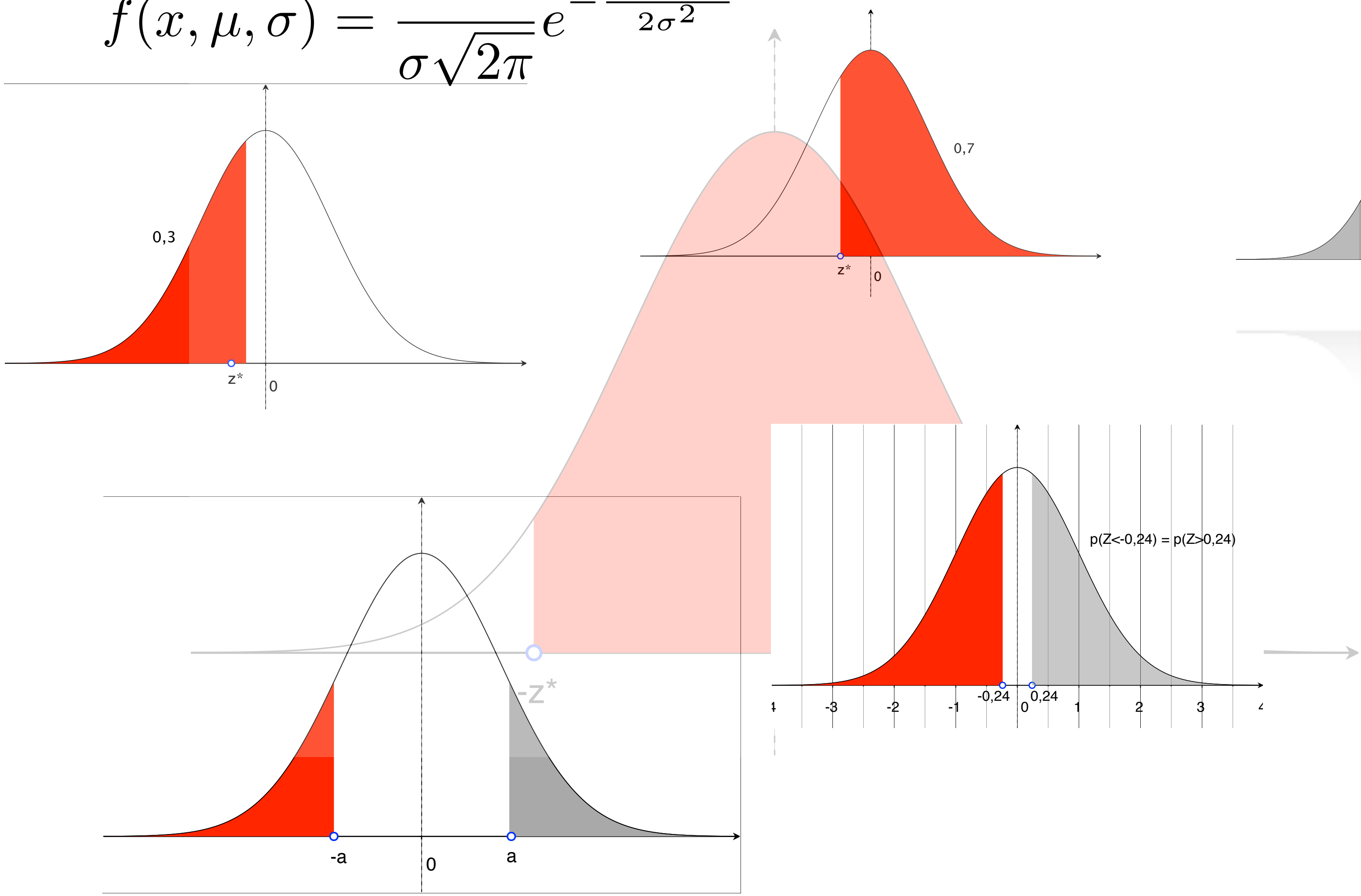
Per probabilitats inverses usem *Inverse cumulative probability*, i si volem que p(X ≤ **x***)=0,3 obtenim el següent resultat,

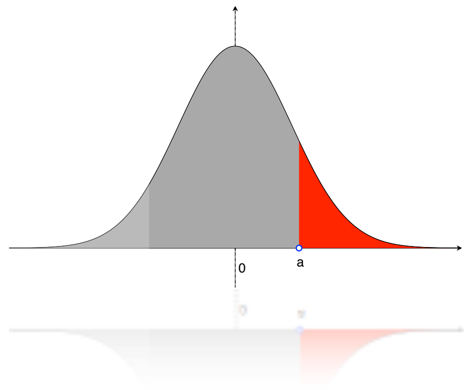
```
Inverse Cumulative Distribution Function
Normal with mean = 0 and standard deviation = 1
P( X <= x )          x
        0,3  -0,524401
```



amb el que **x***=-0,5244.

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$





Àngel Gil
UOC